Projektszám: **89öu11**		HUF 913500 EUR 400
Pályázó neve: **Dr. Csomós Petra**	Intézménye: **MTA TKI**	
Projektpartner neve: **Dr. Hermann Mena**	Intézménye: **Universität Innsbruck**	
Pályázat címe: **Kontrolliertbarkeit der linearisierten Flachwassergleichungen**		

A projekt jellege: (kérjük bejelölni)

- Workshop, konferencia
- Publikáció, tananyag
- **Kutatási együttműködés**
- Oktatási program

Beszámoló/Eredmények

A kutatási együttműködés keretében megvalósult utazások alkalmával többször volt lehetőségünk a személyes konzultációra, valamint a pályázat témájában való közös munkára. Az azokból született, illetve elkészítés alatt álló publikációink az alábbiak:

[1] P. Csomós, H. Mena, J. Schwaighofer: Fourier-Splitting Method for Computing the Optimal State in LQR Problems (preprint)
[2] Á. Bodó, P. Csomós: An Invitation to Meteorological Data Assimilation, megjelenésre elfogadva, "Mathematical Problems in Meteorological Modelling", Springer
[3] J. Schwaighofer: Optimal Control for the Shallow Water Equations using Fourier's Method (MSc szakdolgozat), Universität Innsbruck, 2015.

Kutatásaink során a linearizált sekélyfolyadék-egyenletek kontrollálhatóságával (szabályozhatóságával) foglalkoztunk. Eredményeinket az alábbiakban foglaljuk össze.

Az utóbbi időben az árvizek egyre nagyobb károkat okoznak, így modellezésük és hatékony előrejelzésük egyre fontosabb szerepet játszik életünkben. Elvárható, hogy az árvizek által okozott károkat enyhíteni lehet, ha az árhullám magasságát vagy sebességét csökkenteni tudjuk. A projekt keretében tehát a sekélyfolyadék-egyenletekkel modellezett árhullám optimális szabályozásával foglalkozunk.

Az óceánok és a légkör, valamint a folyók és a tengerek, tavak áramlási folyamatai jól modellezhetők a kétdimenziós linearizált **sekélyfolyadék-egyenletek** segítségével. Ezen egyenletek a vízmagasság és a két koordinátairány szerinti, vertikálisan kiátlagolt sebesség időbeli változását írják le. Tekintsünk egy (folyó vagy tó aljának megfelelő) kétdimenziós tartományt, melyben egy folyadékrészecske helyzetét minden időpillanatban a tartomány pontjaiban mért vízmagasság határozza meg. A továbbiakban a szokásos feltételekkel élünk. (i) A folyadék sekély, azaz mélysége sokkal kisebb a horizontális kiterjedésénél. (ii) A vizsgált tartomány (folyó vagy tó) a Föld közepes földrajzi szélességein helyezkedik el. (iii) A folyadék összenyomhatatlan (sűrűsége állandó a trajektóriák mentén), nem viszkózus (a belső súrlódást elhanyagoljuk), és hidrosztatikus egyensúlyban van (a vertikális nyomásgradiens ellensúlyozza a nehézségi erőt). Ezen megfontolások alapján írhatók fel a sekélyfolyadékegyenletek.

A sekélyfolyadék-egyenletek **optimális szabályozásának** tanulmányozásához az egyenletek linearizált változatára alkalmazunk egy lineáris-kvadratikus szabályzót. Az egyenletek linearizálása egy megfelelő állapottéren értelmezett lineáris absztrakt Cauchy-problémához vezet, melynek egyik tagja az (egyelore ismeretlen) szabályozást írja le. Egy kvadratikus veszteségfüggvény minimalizálása során egy végtelen dimenziójú lineáris-kvadratikus szabályozási problémát kell tehát megoldanunk. Ez a feladat egy Riccati-típusú egyenlet (numerikus) megoldását szükségelteti. A projekt egyik kiemelt célja a linearizált sekélyfolyadék-egyenletek, valamint az azokhoz tartozó Riccati-típusú egyenlet numerikus megoldása. A gyakorlatban sokat alkalmazott operátorszeletelési eljárások jelen esetben is segítenek kihasználni az egyenletek speciális alakját. A linearizált sekélyfolyadék-egyenletek egyszerűen megoldhatók Fourier-térben, ami a szemi-diszkrét Riccati-egyenlet hatékony numerikus megoldását eredményezi.

A projekt keretében eddig az **alábbi célokat** értük el.

(1) Az egy- és kétdimenziós linearizált sekélyfolyadék-egyenletek számítógépes implementálása különféle numerikus módszerek segítségével: véges különbséges és Fourier-módszerrel.
(2) A linearizált sekélyfolyadék-egyenletekhez tartozó Riccati-egyenlet numerikus megoldása.
(3) Az optimális szabályozást leíró tag számítógépes implementálása.

(1) A Fourier-módszer implementálása (a sekélyfolyadék-egyenletek megoldása)

A szabályozást leíró tagot tartalmazó egyenlet numerikus megoldásának tesztelésére a Lax–Wendroff numerikus sémával kiszámolt referencia-megoldást használtuk. Ugyan ez a séma időben és térben is másodrendű, nem feltétlenül eredményez stabil megoldást (v.ö. Courant–Friedrichs–Lewy-féle stabilitási feltétel). Az időlépcsőt éppen ezért elég kicsinek kell választanunk ahhoz, hogy értelmezhető megoldást kapjunk. A projekt keretében vizsgált sekélyfolyadék-egyenletek lineáris volta miatt numerikusan érdemes azokat a Fourier-módszer segítségével megoldani. Mivel a számítógép csak véges sok Fourier-együtthatót képes tárolni, a Fourier-módszer alkalmazása sem vezet az egzakt megoldáshoz: annak hibája az eltárolt Fourier-együtthatók (azaz a térbeli rácspontok) számától függ. Hangsúlyozzuk azonban, hogy a Fourier-módszer alkalmazása még így is igen előnyös, hiszen a Fourier-térben mindössze 3x3 méretű mátrixokkal kell dolgoznunk.

(2) A szabályozást leíró tag implementálása (az algebrai Riccati-egyenlet megoldása)

Az egy- és kétdimenziós linearizált sekélyfolyadék-egyenletekhez tartozó Riccati-típusú egyenlet a Newton-féle iterációs eljárás segítségével oldottuk meg. A szabályozást leíró tag implementálásánál elsőrendű fontosságú a veszteségfüggvényben szereplő súlymátrixok helyes megadása. Ezen mátrixok értékeinek változtatásával különböző eredményekre jutunk a szabályozást leíró tagot, azaz a szabályozott sekélyfolyadék-egyenletek megoldását illetően. Ezen mátrixok segítségével adhatjuk meg a szabályozás fajtáját: szabályozhatunk a tartomány minden pontjában, vagy a tartomány határának egy szakaszán, stb.

(3) Az operátorszeletelési eljárások implementálása

Az egy- és kétdimenziós linearizált sekélyfolyadék-egyenletek véges különbséges és Fourier-módszerrel való implementálása után a szabályozást leíró tagot a szekvenciális és a Strang-féle operátorszeletelési eljárások segítségével vettük figyelembe. Ez lehetővé tette, hogy a sekélyfolyadék-egyenletek numerikus megoldását a Fourier-térben, míg a szabályozást leíró tagot a valódi (azaz fizikai) térben/tartományban számítsuk. Mivel a parabolikus egyenletek numerikus megoldása általában egyszerűbb, az eljárást először a hővezetési egyenletre alkalmaztuk. A szabályozás hatása egyértelműen kimutatható volt: a szabályozott egyenletek megoldása gyorsabban tartott nullához, mint szabályozás nélkül. A szabályozást leíró tag számítógépes implementálása a linearizált sekélyfolyadék-egyenletek esetében is ugyanilyen sikeres volt: az árhullám magassága nullához tart az időben.

Publikációs jegyzék:

[1] P. Csomós, H. Mena, J. Schwaighofer: Fourier-Splitting Method for Computing the Optimal State in LQR Problems (preprint)
[2] Á. Bodó, P. Csomós: An Invitation to Meteorological Data Assimilation, megjelenésre elfogadva, "Mathematical Problems in Meteorological Modelling", Springer
[3] J. Schwaighofer: Optimal Control for the Shallow Water Equations using Fourier's Method (MSc szakdolgozat), Universität Innsbruck, 2015.

Projektnummer: **89öu11**		HUF 913500 EUR 400
Antragsteller: **Dr. Petra Csomós**	Institut: **MTA TKI**	
Projektpartner: **Dr. Hermann Mena**	Institut: **Universität Innsbruck**	
Titel: **Kontrolliertbarkeit der linearisierten Flachwassergleichungen**		

Art der Förderung:

- Workshop, Konferenz
- Publikation, Lehrmaterial
- **Forschungsprojekt**
- Unterrichtsprojekt

Bericht

Im Rahmen der Forschungsaufenthalte hatten wir mehrmals die Gelegenheit zu persönlichen Treffen für die gemeinsame wissenschaftliche Arbeit. Im Rahmen des Projektes wurden die folgenden Arbeiten gefertigt:

[1] P. Csomós, H. Mena, J. Schwaighofer: Fourier-Splitting Method for Computing the Optimal State in LQR Problems (Vorabdruck)
[2] Á. Bodó, P. Csomós: An Invitation to Meteorological Data Assimilation, angenommen in "Mathematical Problems in Meteorological Modelling", Springer
[3] J. Schwaighofer: Optimal Control for the Shallow Water Equations using Fourier's Method (Masterthesis), Universität Innsbruck, 2015

Wir haben uns mit optimaler Kontrolle der linearisierten Flachwassergleichungen beschäftigt. Unsere Ergebnisse (Erscheinung folgt), fassen wir zunächst zusammen.

In letzter Zeit verursachten Hochwasser erhebliche Schäden. Daher ist es wichtig, diese zu modellieren und effizient vorherzusagen. Unter der Annahme, dass Höhe oder Geschwindigkeit des Wassers kontrolliert werden können, erwartet man eine Reduktion solcher Schäden. Daher führen wir im Rahmen dieses Projektes die optimale Regelung des Wasserstroms, modelliert mit Flachwassergleichungen, durch.

Viele in der Atmosphäre, im Ozean und in großräumlichen Flüssen und Seen auftretende Prozesse können mit Hilfe der zweidimensionalen **Flachwassergleichungen** modelliert werden. Sie beschreiben die Zeitveränderung der Wasserhöhe und die vertikal gemittelten Geschwindigkeiten in beiden Koordinatenrichtungen. Wir betrachten ein Gebiet (das einem Fluss oder See entspricht), wo die Position eines Fluidteilchens zu jedem Zeitpunkt mit der Wasserhöhe in jedem Punkt des Gebiets bestimmt werden kann. Wir setzen die üblichen Voraussetzungen. (i) Das Wasser ist flach, das heißt, dessen Tiefe in Relation zum horizontalen Längenmaß ist sehr klein. (ii) Das untersuchte Gebiet (Fluss oder See) befindet sich auf einem mittleren Breitengrad der Erde. (iii) Das Fluid ist inkompressibel (seine Dichte ist konstant entlang der Bahnen), nicht viskos (die innere Reibung wird vernachlässigt), und es befindet sich im hydrostatischen Gleichgewicht (Gleichgewicht des vertikalen Druckgradienten und der Schwerkraft). So ergeben sich die untersuchten Flachwassergleichungen.

Um die **optimale Regelung** für die Flachwassergleichungen untersuchen zu können, wenden wir einen linear-quadratischen Regler für die linearisierte Version der Gleichungen an. Die Linearisierung führt zu einem linearen abstrakten Cauchyproblem auf dem Zustandsraum, wobei ein Term für die (soweit unbekannte) Regelung steht. Durch die Minimierung eines quadratischen Kostenfunktionals wird ein unendlichdimensionales linear-quadratisches Regelungsproblem gelöst. Um dann die optimale Regelung zu finden, benötigt man die (numerische) Lösung einer Art von Riccati-Gleichung. Der Schwerpunkt dieses Projektes ist die numerische Lösung der linearisierten Flachwassergleichungen und der zugehörigen Riccatischen Differentialgleichung. Die linearisierten Flachwassergleichungen können im Fourierraum einfach betrachtet und mit Hilfe von Splitting-Verfahren numerisch gelöst werden, was die effiziente numerische Lösung der semidiskretisierten Riccati-Gleichung bedeutet.

Bisher haben wir folgende **Ziele erreicht**.

(1) Implementierung der ein- und zweidimensionalen linearisierten Flachwasser-gleichungen mit der Hilfe von zwei verschiedenen numerischen Verfahren: finiten Differenzen und Fouriermethode.
(2) Numerische Lösung der den linearisierten Flachwassergleichungen zugehörigen Riccatischen Differential-gleichung.
(3) Implementierung des optimalen Regelungsterms im Code.

(1) Implementierung der Fouriermethode (Lösung der Flachwassergleichungen)

Um unsere numerische Lösung mit dem Regelungsterm testen zu können, erzeugten wir die Referenzlösung mit der Hilfe von Lax–Wendroff-Verfahren. Obwohl dieses Verfahren von zweiter Ordnung in Ort und Zeit ist, ist es nicht unbedingt stabil (vgl. Courant–Friedrichs–Lewy Stabilitätskriterium). Deswegen muss man den Zeitschritt klein genug wählen, um eine sinnvolle Lösung zu erhalten. Da wir uns im Rahmen des Projektes mit den linearisierten Flachwassergleichungen beschäftigen, lohnt es sich für uns, die Gleichungen mit der Fouriermethode numerisch zu lösen. Da Computer nur endlich viele Fourierkoeffizienten speichern können, erhält man nicht die exakte Lösung. Der Fehler der Lösung hängt von der Anzahl der gespeicherten Fourierkoeffizienten, das heißt, von der Anzahl der örtlichen Gitterpunkte ab. Die Implementierung der Fouriermethode ist numerisch gesehen sehr günstig, weil man im Fourierraum mit Matrizen der Größe 3 mal 3 arbeitet.

(2) Implementierung des Regelungsterms (Lösung der algebraischen Riccatischen Gleichung)

Nach der Implementierung der ein- und zweidimensionalen linearen Flachwassergleichungen haben wir die zugehörige algebraische Riccatische Gleichung mit Hilfe von Newtonverfahren gelöst. Bei der Implementierung des Regelungterms soll man sinnvolle Werte für die Gewichtsmatrizen im Kostenfunktional auswählen. Mit der Änderung der Werte dieser Matrizen erhält man allerdings unterschiedliche Resultate für den Regelungsterm, das heißt, für die geregelten Flachwassergleichungen. Mit der Wahl regelt man die Wirkung der Regelung. Man kann diese Regelung in jedem Punkt des Gebiets durchführen, jedoch kann man sie auch z.B. nur auf einen Teil des Randes des Gebiets konzentrieren.

(3) Implementierung der Splitting-Verfahren

Nach der Implementierung der ein- und zweidimensionalen linearisierten Flachwassergleichungen mit finiten Differenzen Verfahren und mit Fouriermethoden haben wir den Regelungsterm mit der Hilfe von sequentiellen und Strang Splitting-Verfahrens implementiert. Das ermöglicht die Implementierung der linearisierten Flachwassergleichungen im Fourierraum und des Regelungsterms im wahren (physikalischen) Gebiet. Da die Implementierung im Falle von parabolischer Gleichungen immer einfacher ist, haben wir die Regelung zuerst im Falle der Wärmeleitungsgleichung implementiert. Die Wirkung der Regelung war deutlich erkennbar: Die geregelte Lösung konvergiert schneller gegen Null als die Lösung ohne Regelung. Die Implementierung des Regelungsterms für die linearisierten Flachwassergleichungen war ebenso erfolgreich: Die Wasserhöhe ist gegen Null konvergiert.

Publikationsliste:
[1] P. Csomós, H. Mena, J. Schwaighofer: Fourier-Splitting Method for Computing the Optimal State in LQR Problems (Vorabdruck)
[2] Á. Bodó, P. Csomós: An Invitation to Meteorological Data Assimilation, angenommen in "Mathematical Problems in Meteorological Modelling", Springer
[3] J. Schwaighofer: Optimal Control for the Shallow Water Equations using Fourier's Method (Masterthesis), Universität Innsbruck, 2015